Kartenfärben

Landkarten werden normalerweise koloriert, um einzelne Gebiete gut unterscheiden zu können. Dabei dürfen benachbarte Gebiete nicht in derselben Farbe gefärbt werden. Es sollen dabei möglichst wenige Farben verwendet werden.

(A1)

Färbe die Karte der Bundesländer nach der beschriebenen Regel.

[1)]

Modellierung

Die Ausgangssituation soll nun als Graph modelliert werden. Dabei stehen die Knoten für die Gebiete der Landkarte, zwei Knoten haben eine gemeinsame Kante, wenn Sie auf der Karte eine gemeinsame Grenzlinie haben.

- https://www.info-bw.de/

Graphenfärbe-Problem: Geben ist ein Graph. Färbe die Knoten des Graphen so, dass keine durch eine Kante verbundene Knoten die gleiche Farbe haben.

Varianten:

- Verwende dabei möglichst wenige Farben.
- Ist es möglich, den Graphen mit k Farben zu färben?

Weiterführende Fragen & Aufgaben

Für die Kolorierung von Graphen gelten folgende Sätze:

- Graphen, die sich mit einer Farbe färben lassen, haben keine Kante außer Schleifen.
- Ein bipartiter[2)] Graph lässt sich mit zwei Farben färben.
- Ein vollständiger Graph mit n Knoten benötigt n Farben.
- Ein Graph mit einer Clique[3)] aus m Knoten benötigt mindestens m Farben.

(A2)

Begründe die obigen Aussagen.

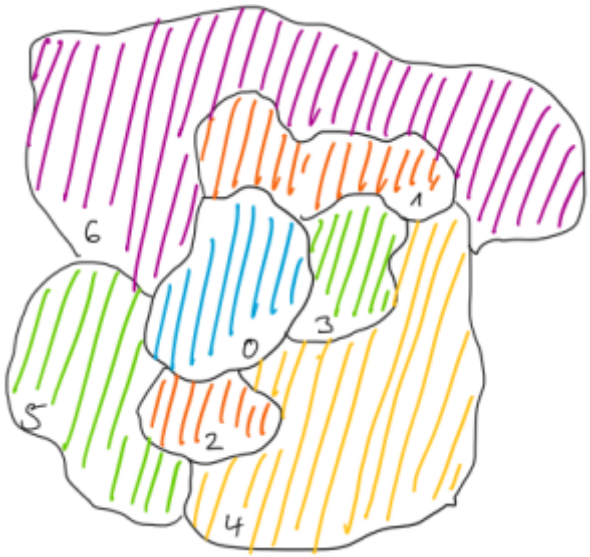
Lösung

- Sobald eine Kante vorhanden ist, sind zwei Knoten verbunden. Wenn dies verschiedene Knoten sind (also keine Schleife), dann dürfen diese nicht die selbe Farbe haben und es werden mindestens zwei Farben benötigt.
- Wenn der Graph bipartit ist, dann zerfällt er in zwei Teilmenge der Knoten, die untereinander überhaupt nicht verbunden sind. Damit kann jede Teilmenge in einer einzigen Farbe eingefärbt werden.
- Bei einem vollständigen Graphen ist jeder Knoten mit allen anderen verbunden. Daher muss jeder Knoten eine eigene Farbe haben.
- In einer Clique sind alle Knoten untereinander verbunden. Daher muss jeder Knoten der Clique eine eigene Farbe bekommen.

(A3)

Beschreibe eine Situation (Landkarte incl. Reihenfolge der Länder), in der der Greedy-Algorithmus mehr als 4 Farben erfordert.

Lösungsvorschlag



Werden die Knoten in der angegebenen Reihenfolge bearbeitet, findet der Greedy-Algorithmus (Farbreihenfolge: blau-rot-grün-gelb-lila) die gezeigte Lösung mit 5 Farben, da das Land 2 ungeschickterweise mit rot statt grün gefärbt wurden.

(A4)

Landkarten lassen sich immer mit vier Farben einfärben. Bestimme die Anzahl der möglichen Färbungen (ohne Beachtung der Regel, dass Nachbarländer nicht die gleiche Farbe haben dürfen) einer Landkarte aus 20 Ländern mit 4 Farben.

Lösung

Es gibt 4^{20} = ca. 1 Billion Möglichkeiten, wenn man die Bedingung nicht beachtet, dass zwei Nachbarländer verschieden gefärbt sein müssen.

(A5)

Für das Kartenfärbeproblem ist kein Algorithmus bekannt, der eine optimale Lösung bestimmt, ohne dabei alle Möglichkeiten auszuprobieren. Begründe die Notwendigkeit eines Näherungsalgorithmus.

Algorithmus

Pseudocode

Pseudocode

```
Kartenfärbung:
Wiederhole für jeden Knoten k des Graphen
  Wiederhole für jede Farbe der Farbliste
     Setze die Farbe auf "unbenutzt"
  Ende-Wiederhole
  Wiederhole für jeden Nachbarknoten n von k
     Betrachte die Farbe des Knoten n
     Setze diese Farbe auf "benutzt"
  Ende-Wiederhole
  Wiederhole für jede Farbe der Farbliste
     Falls die Farbe "unbenutzt" ist
       Färbe den Knoten k mit dieser Farbe
       Brich die Schleife ab
     Ende-Falls
  Ende-Wiederhole

Ende-Wiederhole
```

Beispielimplementation im Graphentester

Beispielimplementation

```
List<Knoten> knoten = g.getAlleKnoten();
for (Knoten aktuellerKnoten: knoten) {
  boolean[] farbenliste = new boolean[g.getAnzahlKnoten()+1];
  for (int i=0; i < farbenliste.length; i++){
    farbenliste[i]=false;
  }

  List<Knoten> nachbarn = g.getNachbarknoten(aktuellerKnoten);
  for (Knoten k : nachbarn){
    farbenliste[k.getFarbe()]=true;
  }

  for (int i=1; i<farbenliste.length; i++){
```

```
    if (!farbenliste[i]) {
      aktuellerKnoten.setFarbe(i);
      break;
    }
  }
}
```

1)
Bundesländer in Deutschland, Stefan-Xp via Wikimedia Commons (Lizenz: CC BY-SA 3.0): https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Germany_blank_map.svg
2)
https://de.wikipedia.org/wiki/Bipartiter_Graph
3)
Wikipedia: Clique

From:
https://www.info-bw.de/ -

Permanent link:
https://www.info-bw.de/faecher:informatik:oberstufe:graphen:zpg:kartenfaerben:start?rev=1670326578

Last update: **06.12.2022 11:36**