

# Grundlagen der Aussagenlogik

Eine **Aussage** bezeichnet ein sprachliches Gebilde, dem in sinnvoller Weise genau eine der beiden Eigenschaften **wahr** oder **falsch** zugeordnet werden kann. Man kürzt ab: wahr=1, falsch=0.

In der **Aussagenlogik** oder **Schaltalgebra** verwenden wir

- **Variablen**, die meist mit  $x_0, x_1, x_2 \dots$  bezeichnet werden. Bei diesen Variablen handelt es sich um boolesche Werte, sie können also nur zwei Zuständen (0 - Falsch, 1 - Wahr) annehmen.
- **Logische Funktionen** ordnen einer oder mehreren booleschen Variablen einen Funktionswert zu, sie werden oft mit  $y$  bezeichnet. Der Funktionswert kann ebenfalls nur 1 (wahr) oder 0 (falsch) sein. Logische Funktionen lassen sich sehr gut als **Wahrheits-** oder **Wertetabellen** darstellen, da durch die beschränkte, diskrete Anzahl der Variablenkombinationen häufig eine Auflistung aller Funktionswerte möglich ist.
- "Gerechnet" wird mit den logischen Verknüpfungen
  - AND:  $\wedge$
  - OR:  $\vee$
  - NOT:  $\neg$
- Beim Rechnen gelten - ähnlich wie die Punkt vor Strich Regeln: "**Klammer vor NOT vor AND vor OR**"

Die Verknüpfung mit **UND**  $\wedge$  nennt man **Konjunktion**  
Die Verknüpfung mit **ODER**  $\vee$  nennt man **Disjunktion**

## "Rechenregeln" der Schaltalgebra

### Kommutativgesetz (Vertauschung erlaubt)

- $x_0 \wedge x_1 = x_1 \wedge x_0$
- $x_0 \vee x_1 = x_1 \vee x_0$

### Distributivgesetz (Gießkannenregel)

- $x_0 \wedge (x_1 \vee x_2) = (x_0 \wedge x_1) \vee (x_0 \wedge x_2)$
- $x_0 \vee (x_1 \wedge x_2) = (x_0 \vee x_1) \wedge (x_0 \vee x_2)$

## Neutralelement

- $x_0 \vee 0 = x_0$
- $x_0 \wedge 1 = x_0$

## Komplement

- $x_0 \wedge \neg x_0 = 0$
- $x_0 \vee \neg x_0 = 1$

## Assoziativgesetze (Klammern dürfen bei gleichen Operatoren weggelassen/umgesetzt werden)

- $(x_0 \wedge x_1) \wedge x_2 = x_0 \wedge x_1 \wedge x_2 = x_0 \wedge (x_1 \wedge x_2)$
- $(x_0 \vee x_1) \vee x_2 = x_0 \vee x_1 \vee x_2 = x_0 \vee (x_1 \vee x_2)$

## Idempotenzgesetze

- $x_0 \wedge x_0 = x_0$
- $x_0 \vee x_0 = x_0$

## Absorptionsgesetze

- $x_0 \vee (x_0 \wedge x_1) = x_0$
- $x_0 \wedge (x_0 \vee x_1) = x_0$

## De Morgan'sche Regel ("ausmultiplizieren des NICHT")

- $\neg(x_0 \vee x_1) = \neg x_0 \wedge \neg x_1$
- $\neg(x_0 \wedge x_1) = \neg x_0 \vee \neg x_1$

## Beispiel

Gegeben ist die logische Funktion  $f$  durch

$$f = (\neg x_0 \wedge \neg x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_0 \wedge x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_0 \wedge x_1 \wedge x_2) \vee (x_0 \wedge \neg x_1 \wedge x_2)$$



(A1)

- Wieviele Zeilen hat die Wahrheitstabelle dieser Funktion?
- Schreibe die Wahrheitstabelle der Funktion auf<sup>1)</sup>.

### Lösung

| x0 | x1 | x2 | f |
|----|----|----|---|
| 0  | 0  | 0  | 0 |
| 0  | 0  | 1  | 1 |
| 0  | 1  | 0  | 1 |
| 0  | 1  | 1  | 1 |
| 1  | 0  | 0  | 0 |
| 1  | 0  | 1  | 1 |
| 1  | 1  | 0  | 0 |
| 1  | 1  | 1  | 0 |

Nun stellt sich die **Frage**, ob man den doch sehr langen Funktionsterm vielleicht unter Verwendung der Rechengesetze so **vereinfachen** kann, dass man einen kürzeren Term als Ergebnis erhält, der **dieselbe Wahrheitstabelle** hat, also **dieselbe logische Funktion** beschreibt.

Wenn man die Wertetabelle der Beispielfunktion betrachtet, fällt auf:

**(1)** Wenn  $x_0=0$  und  $x_1=1$  ist der Funktionswert 1, gleichgültig, was für einen Wert  $x_2$  annimmt.

| x0 | x1 | x2 | f |
|----|----|----|---|
| 0  | 0  | 0  | 0 |
| 0  | 0  | 1  | 1 |
| 0  | 1  | 0  | 1 |
| 0  | 1  | 1  | 1 |
| 1  | 0  | 0  | 0 |
| 1  | 0  | 1  | 1 |
| 1  | 1  | 0  | 0 |
| 1  | 1  | 1  | 0 |

Das entspricht den beiden eingerahmten Termen:

$$f = (\neg x_0 \wedge \neg x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_0 \wedge x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_0 \wedge x_1 \wedge x_2) \vee (x_0 \wedge \neg x_1 \wedge x_2)$$

Rechnerisch kann man hier den Teilterm  $(\neg x_0 \wedge x_1)$  ausklammern, so dass der eingerahmte Term zu  $(\neg x_0 \wedge x_1) \wedge (\neg x_2 \vee x_2)$

# Aufgaben

1)

Das geht auch mit einem Tabellenverarbeitungsprogramm....

From:  
<https://www.info-bw.de/> -

Permanent link:  
[https://www.info-bw.de/faecher:informatik:oberstufe:techinf:formale\\_logik:grundlagen:start?rev=1726124993](https://www.info-bw.de/faecher:informatik:oberstufe:techinf:formale_logik:grundlagen:start?rev=1726124993)

Last update: **12.09.2024 07:09**

