

Grundlagen der Aussagenlogik

Eine **Aussage** bezeichnet ein sprachliches Gebilde, dem in sinnvoller Weise genau eine der beiden Eigenschaften **wahr** oder **falsch** zugeordnet werden kann. Man kürzt ab: wahr=1, falsch=0.

In der **Aussagenlogik** oder **Schaltalgebra** verwenden wir

- **Variablen**, die meist mit x_0, x_1, x_2, \dots bezeichnet werden. Bei diesen Variablen handelt es sich um boolesche Werte, sie können also nur zwei Zuständen (0 - Falsch, 1 - Wahr) annehmen.
- **Logische Funktionen** ordnen einer oder mehreren booleschen Variablen einen Funktionswert zu, sie werden oft mit f bezeichnet. Der Funktionswert kann ebenfalls nur 1 (wahr) oder 0 (falsch) sein. Logische Funktionen lassen sich sehr gut als **Wahrheits-** oder **Wertetabellen** darstellen, da durch die beschränkte, diskrete Anzahl der Variablenkombinationen häufig eine Auflistung aller Funktionswerte möglich ist.
- "Gerechnet" wird mit den logischen Verknüpfungen
 - AND: \wedge
 - OR: \vee
 - NOT: \neg
- Beim Rechnen gelten - ähnlich wie die Punkt vor Strich Regeln: "**Klammer vor NOT vor AND vor OR**"

Die Verknüpfung mit **UND** \wedge nennt man **Konjunktion**
Die Verknüpfung mit **ODER** \vee nennt man **Disjunktion**

"Rechenregeln" der Schaltalgebra

Kommutativgesetz (Vertauschung erlaubt)

- $x_0 \wedge x_1 = x_1 \wedge x_0$
- $x_0 \vee x_1 = x_1 \vee x_0$

Distributivgesetz (Gießkannenregel)

- $x_0 \wedge (x_1 \vee x_2) = (x_0 \wedge x_1) \vee (x_0 \wedge x_2)$
- $x_0 \vee (x_1 \wedge x_2) = (x_0 \vee x_1) \wedge (x_0 \vee x_2)$

Neutralelement

- $x_0 \vee 0 = x_0$
- $x_0 \wedge 1 = x_0$

Komplement

- $x_0 \wedge \neg x_0 = 0$
- $x_0 \vee \neg x_0 = 1$

Assoziativgesetze (Klammern dürfen bei gleichen Operatoren weggelassen/umgesetzt werden)

- $(x_0 \wedge x_1) \wedge x_2 = x_0 \wedge x_1 \wedge x_2 = x_0 \wedge (x_1 \wedge x_2)$
- $(x_0 \vee x_1) \vee x_2 = x_0 \vee x_1 \vee x_2 = x_0 \vee (x_1 \vee x_2)$

Idempotenzgesetze

- $x_0 \wedge x_0 = x_0$
- $x_0 \vee x_0 = x_0$

Absorptionsgesetze

- $x_0 \vee (x_0 \wedge x_1) = x_0$
- $x_0 \wedge (x_0 \vee x_1) = x_0$

De Morgan'sche Regel ("ausmultiplizieren des NICHT")

- $\neg(x_0 \vee x_1) = \neg x_0 \wedge \neg x_1$
- $\neg(x_0 \wedge x_1) = \neg x_0 \vee \neg x_1$

Beispiel

Gegeben ist die logische Funktion f durch

$$f = (\neg x_0 \wedge \neg x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_0 \wedge x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_0 \wedge x_1 \wedge x_2) \vee (x_0 \wedge \neg x_1 \wedge x_2)$$



(A1)

- Wieviele Zeilen hat die Wahrheitstabelle dieser Funktion?
- Schreibe die Wahrheitstabelle der Funktion auf¹⁾.

Lösung

x0	x1	x2	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Nun stellt sich die **Frage**, ob man den doch sehr langen Funktionsterm vielleicht unter Verwendung der Rechengesetze so **vereinfachen** kann, dass man einen kürzeren Term als Ergebnis erhält, der **dieselbe Wahrheitstabelle** hat, also **dieselbe logische Funktion** beschreibt.

Wenn man die Wertetabelle der Beispielfunktion betrachtet, fällt auf:

(1) Wenn $x_0=0$ und $x_1=1$ ist der Funktionswert 1, gleichgültig, was für einen Wert x_2 annimmt.

x0	x1	x2	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Das entspricht den beiden eingerahmten Termen:

$$f = (\neg x_0 \wedge \neg x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_0 \wedge x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_0 \wedge x_1 \wedge x_2) \vee (x_0 \wedge \neg x_1 \wedge x_2)$$

Rechnerisch kann man hier den Teilterm $(\neg x_0 \wedge x_1)$ ausklammern, so dass der eingerahmte Term zu $(\neg x_0 \wedge x_1) \wedge (\neg x_2 \vee x_2)$

wird.



(A2)

Vereinfache die folgenden logischen Terme:

- $f = x_1 \wedge (\neg x_2) \vee x_1 \wedge x_2$
- $g = x_1 \wedge (\neg x_2) \wedge x_3 \vee x_1 \wedge (\neg x_2) \wedge (\neg x_3) \vee (\neg x_1) \wedge (\neg x_2) \wedge (\neg x_3)$

$$h = (\neg x_1) \cdot (\neg x_2) \cdot (\neg x_3) + (\neg x_1) \cdot (\neg x_2) \cdot x_3 + (\neg x_1) \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot (\neg x_2) \cdot (\neg x_3) + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot (\neg x_3)$$

1)

Das geht auch mit einem Tabellenverarbeitungsprogramm....

From:
<https://www.info-bw.de/> -

Permanent link:
https://www.info-bw.de/faecher:informatik:oberstufe:techinf:formale_logik:grundlagen:start?rev=1727202439

Last update: **24.09.2024 18:27**

